S. 44 / 32)

14.09.11

a) Graph besitzt zwei Extrempunkte und $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{x \to \infty} {\infty \atop -\infty}$

$\Rightarrow$ Gesucht: Funktion 3. Grades der Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$(f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c)$

Bekannte Bedingungen:

1.) $f(2) = 8$, da $P(2|8)$ auf dem Graphen

2.) $f(6) = 0$, da $P(6|0)$ auf dem Graphen

3.) $f'(2) = 0$, da Maximum in f bei $x = 2$

4.) $f'(6) = 0$, da Minimum in f bei $x = 6$

Einsetzen in gesuchte Form:

1.) $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 8a + 4b + 2c + d = 8$

2.) $a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d = 216a + 36b + 6c + d = 0$

3.) $3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 12a + 4b + c = 0$

4.) $3a \cdot 6^2 + 2b \cdot 6 + c = 108a + 12b + c = 0$

Erstellen des LGS:

$$\begin{array}{r|l|}
\text{I} & 8a + 4b + 2c + d = 8 \\
\text{II} & 216a + 36b + 6c + d = 0 \\
\text{III} & 12a + 4b + c = 0 \\
\text{IV} & 108a + 12b + c = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|}
\text{I} & 8a + 4b + 2c + d = 8 \\
\text{II} - \text{I} = \text{II}' & 208a + 32b + 4c = -8 \\
\text{III} & 12a + 4b + c = 0 \\
\text{IV} - \text{III} = \text{IV}' & 96a + 8b = 0
\end{array}$$

Bestimmen von „b":

IV': $96a + 8b = 0 \quad | -8b$

$96a = -8b \quad | :(-8)$

$\underline{\underline{-12a = b}}$

Bestimmen von „c":

„b" aus IV'

II': $208a + 32 \cdot (-12a) + 4c = -8$

$208a - 384a + 4c = -8$

$-176a + 4c = -8 \quad | +8$

$-176a + 4c + 8 = 0 \quad | -4c$

$-176a + 8 = -4c \quad | :(-4)$

$\underline{\underline{44a - 2 = c}}$

Bestimmen von „a":

„c" und „b" in III einsetzen:

$12a + 4 \cdot \underbrace{(-12a)}_{\text{„b"}} + \underbrace{(44a - 2)}_{\text{„c"}} = 0$

$12a + (-48a) + 44a - 2 = 0$

$8a - 2 = 0 \quad | +2$

$8a = 2 \quad | :8$

$\underline{\underline{a = 1/4}}$

Endgültige Bestimmung von „b" und „c":

$a = \underline{\underline{1/4}}$

$b = -12a = -12 \cdot (1/4) = \underline{\underline{-3}}$

$c = 44a - 2 = 44 \cdot (1/4) - 2 = \underline{\underline{9}}$

Bestimmung von „d":

„a", „b" und „c" einsetzen in I:

$$8a + 4b + 2c + d = 8$$
$$8 \cdot (1/4) + 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (9) + d = 8$$
$$2 - 12 + 18 + d = 8$$
$$8 + d = 8 \quad | -8$$
$$\underline{\underline{d = 0}}$$

⇒ aus den bestimmten Variablen lässt sich folgender Funktionsterm als Lösung der Aufgabe bestimmen:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x}$$