1

Nr. 7

- $f_a(x) = -\frac{1}{2a^2}x^4 + \frac{1}{a}x^3;\ a \in \mathbb{R}^+$ | Funktion
- dazugehörige Parabeln seien K_a | Erklärung zum Graph

a) 1) Schnittpunkte von K_a mit Koordinatenachsen

Nullstellen / Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

$f_a(x) \stackrel{!}{=} 0$ | denn y-Wert ist an dieser Stelle 0

mit GTR:

$-\frac{1}{2a^2}x^4 + \frac{1}{a}x^3 \stackrel{!}{=} 0$

$\underline{\underline{x = 2a}}$ oder $\underline{\underline{x = 0}}$

Schnittpunkte mit y-Achse

$f_a(x=0)$ | denn der x-Wert ist an dieser Stelle 0

mit GTR:

$-\frac{1}{2a^2} \cdot 0^4 + \frac{1}{a} \cdot 0^3 = f_a(x=0)$

$f_a(x=0) = \underline{\underline{0}}$

②

2) Extrema

$f_a'(x) \overset{!}{=} 0$

mit GTR:

$\underline{\underline{x = \frac{3 \cdot a}{2}}}$ oder $\underline{\underline{x = 0}}$ | mögliche Extrempunkte

Kontrolle:

$\rightarrow f_a''\left(x = \frac{3 \cdot a}{2}\right) \overset{!}{\neq} 0$ | soll ungleich 0 sein

$f_a''(x) = \frac{6x}{a} - \frac{6 \cdot x^2}{a^2}$ | 2. Ableitung wurde berechnet

$f_a''\left(x = \frac{3 \cdot a}{2}\right)$ | mit GTR

$\underline{= -\,9/2} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x = \frac{3 \cdot a}{2}$

$\rightarrow f_a''(x = 0) \overset{!}{\neq} 0$

$f_a''(x = 0)$ | mit GTR

$\underline{\underline{x = 0}} \Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x = 0$

y-Koordinate des Extrempunkts

$\rightarrow f_a\left(x = \frac{3 \cdot a}{2}\right)$ | mit GTR

$= \frac{27 \cdot a^2}{32}$

$EP\left(\frac{3 \cdot a}{2} \;\middle|\; \frac{27 \cdot a^2}{32}\right)$

③

3) Wendepunkt

$\Rightarrow f_a''(x) \overset{!}{=} 0$

$0 = \frac{6 \cdot x}{a} - \frac{6 \cdot x^2}{a^2}$ | mit GTR

$\underline{\underline{x = a}}$ oder $\underline{\underline{x = 0}}$ | $x = 0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt

y-Koordinate der Wendepunkte

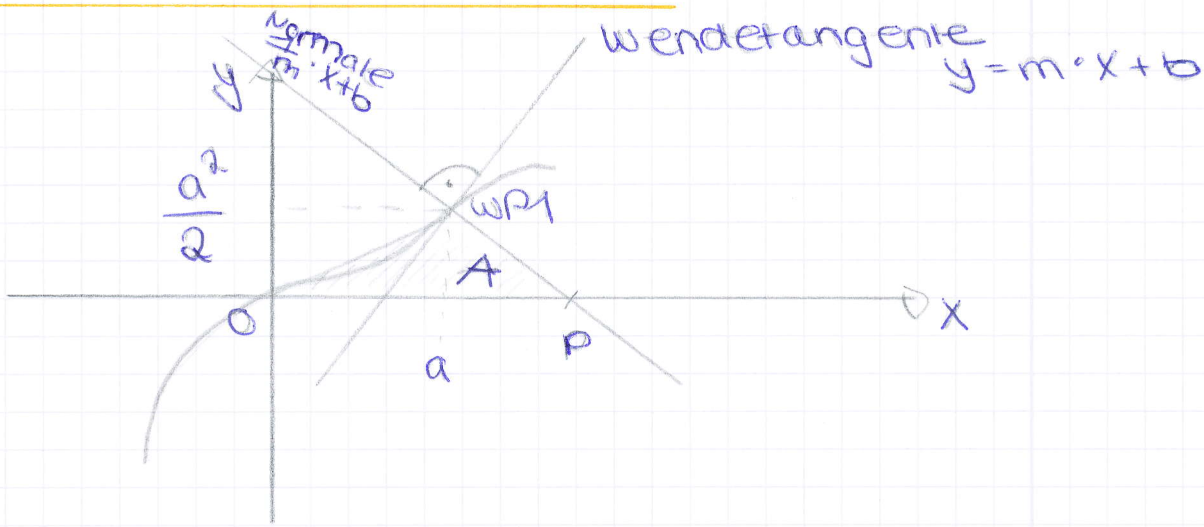
$\Rightarrow f_a(x \overset{!}{=} a)$ | mit GTR

$= \frac{a^2}{2}$ $\qquad \underline{\underline{WP_1 \left(a \mid \frac{a^2}{2} \right)}}$

$\Rightarrow f_a(x = 0)$

$= 0$ $\qquad \underline{\underline{SP\ (0 \mid 0)}}$

b) Die Normale von K_a im Wendepunkt WP_1 schneidet die x-Achse im Punkt P. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OPW.



$WP \left(a \mid \frac{a^2}{2} \right)$

④

Steigung m der Wendetangente

$y = m \cdot x + b$

$f_a'(x \stackrel{!}{=} a)$

$\underline{\underline{m = a}}$

Steigung $-\frac{1}{m}$ der Normalengleichung

$m = a$

$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{a}$

Kurzhinweis:
Es gilt für die Steigung der Normalen $m_N = -\frac{1}{m}$, wenn m Steigung der Tangente ist.

Normalengleichung

$y = -\frac{1}{a} \cdot x + b$ | WP-Koordinaten einsetzen

$\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{a} \cdot a + b$ | mit GTR

$\underline{b = \frac{a^2}{2} + 1}$

$$\boxed{g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot x + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)}$$

Gleichung der Normalen

Schnittpunkt von g(x) mit x-Achse

$g_a(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\underline{\underline{x = \frac{a \cdot (a^2 + 2)}{2}}}$$

5 Flächeninhalt des Dreiecks

$$\boxed{A = \frac{g \cdot h}{2}}$$

$$g = \frac{a \cdot (a^2+2)}{2} = p$$ | Nullstelle der Normale

$$u = \frac{a^2}{2} = w$$ | y-Koordinate des Wendepunkts

$$A = \frac{\frac{a \cdot (a^2+2)}{2} \cdot \frac{a^2}{2}}{2}$$ | mit GTR vereinfachen

$$\boxed{A = \frac{a^3 \cdot (a^2+2)}{8}}$$ Gleichung für Flächeninhalt des Dreiecks OPW

Wie groß muss a sein, damit der Flächeninhalt A = 13 FE (Flächeneinheiten) ist?

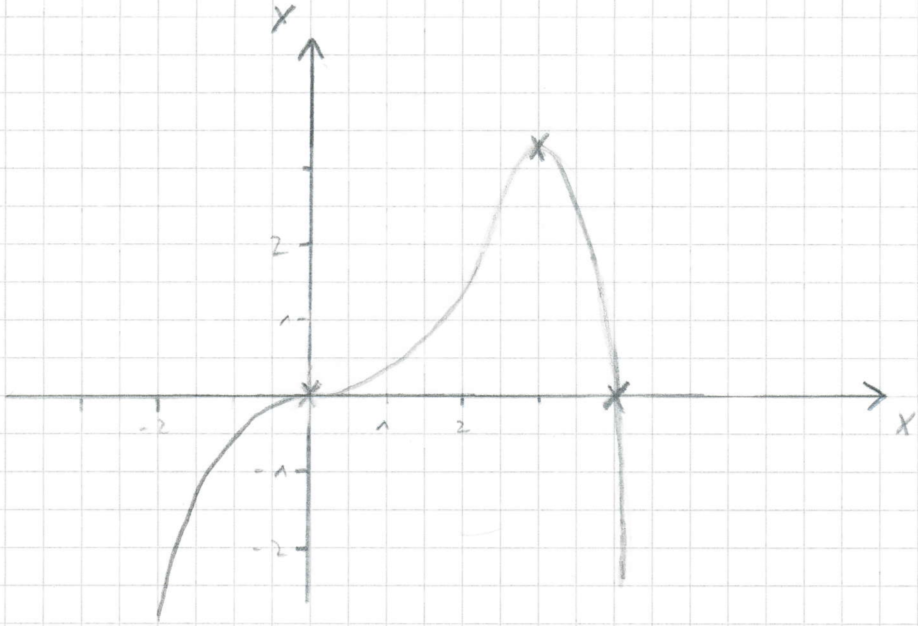
mit GTR:

$$13 = \frac{a^3 \cdot (a^2+2)}{8}$$ Gleichung für Flächeninhalt von Dreieck OPW

$a \approx 2{,}3835$ Bei diesem Wert für a ist der Flächeninhalt A 13 FE groß.

⑥

Graph zu 7a



von Larissa, Johanna, Luisa
Theresa und Viola