Block 2B – Aufgabe 1

Üblicherweise werden Volkswirtschaften in drei Wirtschaftssektoren eingeteilt: Sektor I (Land- und Forstwirtschaft), Sektor II (Industrie und produzierendes Gewerbe) und Sektor III (Dienstleistungen).

Die nebenstehende Tabelle zeigt für das fiktive Land Utopia die prozentualen Anteile der Beschäftigten in den drei Wirtschaftssektoren an der Gesamtbeschäftigung.

Jahr	1970	1980	1990	2000
Sektor I	0,06	0,04	0,03	0,02
Sektor II	0,36	0,30	0,27	0,24
Sektor III	0,58	0,66	0,70	0,74

Die folgenden zwei Modelle beschreiben die Entwicklung der Anteile der Beschäftigten in den drei Sektoren jeweils für eine Zeiteinheit von 10 Jahren:

Modell A		von I	von II	von III
nach	I	0,75	0,00	0,00
nach	II	0,10	0,90	0,00
nach	III	0,15	0,10	1,00

Modell B		von I	von II	von III
nach	I	0,50	0,01	0,01
nach	II	0,20	0,60	0,12
nach	III	0,30	0,39	0,87

a) Begründen Sie im Sachzusammenhang, warum bei den zu den Modellen A und B gehörenden Matrizen alle Spaltensummen gleich 1 sind.
Berechnen Sie unter Verwendung der Modelle A und B – ausgehend von der prozentualen Verteilung der Erwerbstätigen im Jahr 1980 – die Verteilungen für das Jahr 2000.
Beurteilen Sie die Güte der Modelle für die Entwicklung in Utopia durch Vergleich Ihrer Ergebnisse mit den gegebenen Werten.
Zeigen Sie, dass Modell A langfristig die Entwicklung der Anteile der Beschäftigten in den drei Sektoren nicht sinnvoll beschreibt.

b) Angenommen, der Anteil der Beschäftigten im Sektor I wäre im Zeitraum von 1980 bis 1990 von 4% auf 2% gefallen. Dazu soll das Modell A wie folgt geändert werden:

- Die Übergangsquote von I nach II soll erhöht und der Verbleib in I entsprechend gesenkt werden.
- Die übrigen Übergangsquoten sollen unverändert bleiben.

Bestimmen Sie eine entsprechende neue Matrix C.

Berechnen Sie das Produkt aus der Inversen der Matrix B und der prozentualen Verteilung der Erwerbstätigen im Jahr 1980 und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Beweisen Sie folgenden Satz:

Ist $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 \\ d_3 & d_3 & d_3 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit gleichen Spalten und M eine 3×3-Matrix, bei der alle Spaltensummen gleich 1 sind, dann gilt: $D \cdot M = D$.
Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz von CAS nachvollziehbar ist.

Block 2B – Aufgabe 2

In einer Fabrik werden Präzisionsschrauben von Maschine A hergestellt. Da die Fehlerquote hierbei verfahrensbedingt sehr groß ist, untersucht Maschine B die Schrauben auf Defekte. Sie sortiert dabei erfahrungsgemäß 98% aller defekten, aber auch 1% aller einwandfreien Schrauben aus. Die nicht aussortierten Schrauben werden ausgeliefert. Der Hersteller behauptet, dass nur 4% aller ausgelieferten Schrauben defekt sind.

a) Ein Kunde untersucht eine Stichprobe von 450 Schrauben und findet 32 defekte Schrauben. Bestimmen Sie ein Vertrauensintervall ($\gamma = 90\%$) für den Anteil der defekten Schrauben und beurteilen Sie die obige Herstellerangabe auf der Grundlage Ihres Ergebnisses.

b) Nach einer neuen Einstellung produziert Maschine A noch 30% defekte Schrauben. Untersuchen Sie, ob der Anteil der defekten unter den ausgelieferten Schrauben dadurch gesenkt wird.

Der Term $\frac{a \cdot x}{a \cdot x + b \cdot (1-x)}$ beschreibt allgemein den Anteil der defekten unter den ausgelieferten Schrauben.
Interpretieren Sie a, b und x im Sachzusammenhang.

Material

Anlage

Umgebungen des Erwartungswertes bei Binomialverteilungen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\sigma > 3$)						
Radius der Umgebung	$1 \cdot \sigma$	$1{,}64 \cdot \sigma$	$1{,}96 \cdot \sigma$	$2 \cdot \sigma$	$2{,}58 \cdot \sigma$	$3 \cdot \sigma$
Wahrscheinlichkeit	68 %	90 %	95 %	95,5 %	99 %	99,7 %

Block B Aufgabe 1

a) Spaltensummen müssen 1 sein, da damit alle, also 100% der Beschäftigten in allen Sektoren I, II u. III erfasst werden. (1)

1) **Modell A**: Übergangsmatrix $U_A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}0 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 1{,}0 \end{pmatrix}$ (1)

Anfangsvektor: $p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}3 \\ 0{,}66 \end{pmatrix}$ (1)

Verteilung für 200: $p_{2000} = U_A^2 \cdot p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}0225 \\ 0{,}2496 \\ 0{,}7279 \end{pmatrix}$ (1) (1)

16 P.

2) **Modell B**:

$U_B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}12 \\ 0{,}3 & 0{,}39 & 0{,}87 \end{pmatrix}$ (1) $\quad p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}3 \\ 0{,}66 \end{pmatrix}$ (1)

$p_{2000} = U_B^2 \cdot p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}0245 \\ 0{,}2506 \\ 0{,}7249 \end{pmatrix}$ (1)

Der angegebene Vektor für 2000 ist: $\begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}24 \\ 0{,}74 \end{pmatrix}$ (1)

(1)
Beide Modelle sind etwa gleichgut geeignet, die Entwicklung zu beschreiben.

$s = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$ (1) $\quad U_A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$ (1)

Die Lsg d. Gleichung ist der Grenzvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1)

(1)
d.h. dass langfristig alle Leute im Sektor III arbeiten, u. keiner mehr in Sektor I und II (1)

$\Rightarrow$ Modell A ungeeignet auf lange Sicht (1)

b) neue Übergangsmatrix: $U_A' = \begin{pmatrix} 0{,}75-a & 0 & 0 \\ 0{,}1+a & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$ (1) (1)

1980 $\begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}3 \\ 0{,}66 \end{pmatrix}$ (1) 1990 $\begin{pmatrix} 0{,}02 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ (1) (8)

14P.

$$U_A' \cdot \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}3 \\ 0{,}66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (1); also } -0{,}04\,(a-0{,}75) = 0{,}02 \text{ (1)}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}25}} \text{ (1)}$$

neue Matrix: $U_A' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$ (1)

$B = U_B$

$$U_B^{-1} \text{ (1)} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}3 \\ 0{,}66 \end{pmatrix} \text{ (1)} = \begin{pmatrix} 0{,}0612 \\ 0{,}3648 \\ 0{,}574 \end{pmatrix} \text{ (1)}$$

Das Produkt ist (1) näherungsweise die Verteilung für das Jahr 1970 (1) die wäre exakt $\begin{pmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}36 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$ (1) (6)

c) $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 \\ d_3 & d_3 & d_3 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$

Voraussetzung:

$e_1 + l_1 + f_1 = 1$ (1)
$e_2 + l_2 + f_2 = 1$ (1)
$e_3 + l_3 + f_3 = 1$ (1)

10P.

es gilt: $D \cdot M = \begin{pmatrix} d_1(e_1+l_1+f_1) & d_1(e_2+l_2+f_2) & d_1(e_3+l_3+f_3) \\ d_2(\quad -"- \quad) & d_2(\quad -"- \quad) & d_2(\quad -"- \quad) \\ d_3(\quad -"- \quad) & d_3(\quad -"- \quad) & d_3(\quad -"- \quad) \end{pmatrix}$ (2) (2) (2)

$$\underset{\text{lt. Voraussetzung (1)}}{=} \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 \\ d_2 & d_2 & d_2 \\ d_3 & d_3 & d_3 \end{pmatrix} = D$$

40P.

w.z.b.w.

2B Aufgabe 2

a) $n = 450$ 32 defekte Schrauben

relat. Häufigkeit: $h = \frac{32}{450}$ (1)

Ansatz Vertrauensintervall: (1)

6P. $\left| \frac{32}{450} - p \right| \leq 1{,}64 \, \frac{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}{n}$ (1)

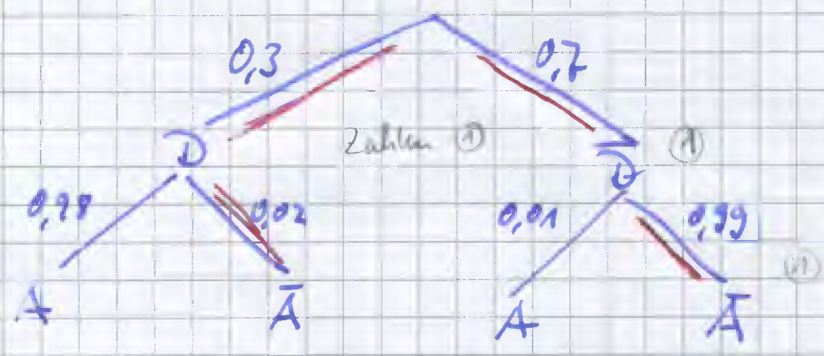
Lsg d. Ungleichung: $p = [\,0{,}053 \mid 0{,}093\,]$ (1) (1)

⇒ Herstellerangabe mit 4% sind nicht eingehalten (1)

es sind zw. 5,3% und 9,3% d. gelieferten Schrauben defekt mit 90% Sicherheit.

TI-Stat: liefert direkt $p = [\,0{,}0512 \mid 0{,}091\,]$

b) D: Defekt (1) A: aussortiert $\bar{A}$: ausgeliefert



8P.

(1)

$P(\text{defekt} \mid \text{ausgeliefert}) = P(D \mid \bar{A}) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}7 \cdot 0{,}99}$ (1)

$= 0{,}0086$ (1)

d.h. nur 0,86% der ausgelieferten Schrauben sind defekt

Die Neueinstellung d. Maschine A war erfolgreich (1)

(1)

$P(\text{defekt} \mid \text{ausgeliefert}) = \frac{P(\text{ausgeliefert} \mid \text{defekt}) \cdot P(\text{defekt})}{P(\text{ausgeliefert})} = \frac{a \cdot x}{ax + b(1-x)}$ (1) (1)

6P.

x: Anteil d. von A prod. defekten Schrauben (1)

a: Wahrsch., dass eine defekte Schr. ausgeliefert wird (1)

b: –"–, dass eine einwandfreie Schraube ausgeliefert wird) (1)

20P.