Zauberbohnen

a) Jack beobachtet das Wachstum seiner Bohnenpflanze, in der Zauberkräfte stecken sollen. Zu Beginn seiner Beobachtung erkennt er, dass die Pflanze 9 mm hoch ist, nach 1 Woche hat sie die Höhe von 1,5 cm erreicht. Jack gibt die Hoffnung nicht auf und berechnet die zukünftige Höhe h seiner Pflanze nach der Formel

$$h(x) = \left(a - e^{bx}\right)^2,$$

wobei er x in Wochen annimmt.
Finden Sie die Werte für a und b heraus und beurteilen Sie das weitere Wachstum nach dem entsprechenden Modell.

b) Während die Bohne wächst, denkt Jack über seinen Ansatz nach und erkennt, dass die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (k - e^x)^2$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ einige Besonderheiten hat. Helfen Sie Jack bei der Beantwortung der folgenden Fragen:

(1) Gibt es für alle k Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte?

(2) Gibt es Ortslinien für die Extrem- und Wendepunkte und wie sieht die Schar der Wendetangenten aus?

(3) Gibt es zwei Graphen der Schar, die sich auf der y-Achse rechtwinklig schneiden?

(4) Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und seiner Asymptote scheint interessant zu sein. Wie groß ist für $k > 0$ dieser Flächeninhalt zwischen $x = 0$ und $x = -\infty$?
Wie groß könnte der Rauminhalt des Drehkörpers sein, wenn diese Fläche um die Asymptote rotiert?

Lösung

a) Ansatz $h(x) = (a - e^{bx})^2$, mit $h(0) = 0{,}9$ und $h(1) = 1{,}5$.
Bestimmung der Parameter a und b:
Aus der ersten Bedingung wird a berechnet.

$0{,}9 = (a-1)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{0{,}9} + 1 \approx 1{,}95$ oder $a = -\sqrt{0{,}9} + 1 \approx 0{,}05$

Mit diesen zwei Lösungen für a wird b aus der zweiten Bedingung berechnet:

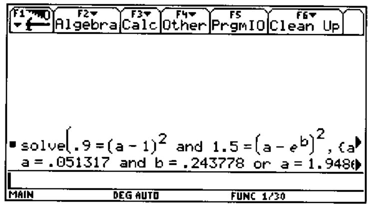
$1{,}5 = (\sqrt{0{,}9} + 1 - e^b)^2$

$\Rightarrow \quad b = \ln(\sqrt{0{,}9} + 1 - \sqrt{1{,}5}) \approx -0{,}32$ oder $b = \ln(\sqrt{0{,}9} + 1 + \sqrt{1{,}5}) \approx 1{,}15$

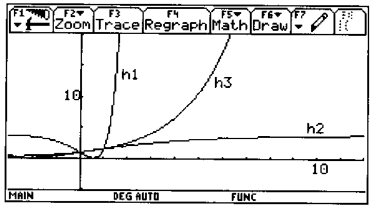
$1{,}5 = (-\sqrt{0{,}9} + 1 - e^b)^2$

$\Rightarrow \quad b = \ln(-\sqrt{0{,}9} + 1 + \sqrt{1{,}5}) \approx 0{,}24$ oder $b = \ln(-\sqrt{0{,}9} + 1 - \sqrt{1{,}5})$ ist nicht definiert.

Bei Wurzelgleichungen ist immer zu überprüfen, ob das Ergebnis sein kann.
Der Rechner liefert die 3 Wertepaare als Lösung
$a \approx 0{,}05$ und $b \approx 0{,}24$ oder
$a \approx 1{,}95$ und $b \approx 1{,}15$ oder
$a \approx 1{,}95$ und $b \approx -0{,}32$



Es bleiben drei Funktionen zu untersuchen:
$h_1(x) \approx (1{,}95 - e^{1{,}15x})^2$ ist sehr wundersam, denn zwischen 0 und 1 liegt eine Nullstelle. Jack hätte verpasst, zu sehen, wie seine Bohne während der ersten Woche eingeht und neu aus dem Nichts entsteht. Zauberbohnen können so etwas anscheinend. Sie wächst geradezu staunenswert und ist in der 4. Woche bereits etwa 95 m hoch.



$h_2(x) \approx (1{,}95 - e^{-0{,}32x})^2$ ist die traurige Lösung, denn das Wachstum der Bohne nähert sich asymptotisch dem Grenzwert von $1{,}95^2$ an, sie wird also nur etwa 3,8 cm hoch.

$h_3(x) \approx (0{,}05 - e^{0{,}24x})^2$ entspricht den Erwartungen an eine Zauberbohne, die etwas länger braucht, bis sie ihre Kraft entfaltet hat. Nach 10 Wochen ist sie etwa 1,2 m hoch und nach 20 Wochen etwa 150 m. Einige Wochen später kann Jack auf ihr in den Himmel steigen.

b) Untersuchung der Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (k - e^x)^2$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

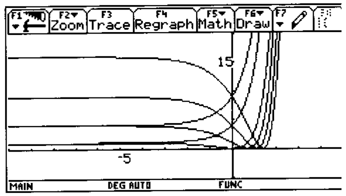
(1) Der Wertebereich ist immer „nicht-negativ", also positiv oder null.
Es gibt keine senkrechten Asymptoten, denn $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Für $x \to -\infty$ ist die Gerade $y = k^2$ waagerechte Asymptote für alle k,
denn $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
Für $x \to \infty$ gilt $f_k(x) \to \infty$.

Es gibt eine Nullstelle, wenn $k > 0$, denn $f_k(x) = 0$ ist erfüllt für $x = \ln(k)$. Für nicht-positive k ist ln(k) nicht definiert.

Ableitungen:

$f_k'(x) = 2e^x(e^x - k)$

$f_k''(x) = 2e^x(2e^x - k)$



Für die Extrempunkte gilt das gleiche wie für die Nullstellen. Wenn $k > 0$, dann gibt es einen Tiefpunkt mit $T(\ln(k)\,|\,0)$. Dass die Nullstelle der Tiefpunkt ist, braucht nicht nachgewiesen werden, das ergibt sich aus dem Wertebereich von f_k. Als Ortslinie der Tiefpunkte erhält man also die x-Achse.

Für jeden Graphen $f_k(x)$ mit $k > 0$, der einen Tiefpunkt hat, gibt es auch einen Wendepunkt. Das muss schon aus geometrischen Gründen so sein, weil keine Polstellen vorhanden sind.

$f_k''(x) = 0$ gilt für $x = \ln\left(\frac{1}{2}k\right)$

$$f_k\left(\ln\left(\frac{1}{2}k\right)\right) = \left(k - \frac{1}{2}k\right)^2 = \frac{1}{4}k^2$$

Wendepunkte $W\left(\ln\left(\frac{1}{2}k\right) \,\Big|\, \frac{1}{4}k^2\right)$

(2) Ortslinie der Wendpunkte: $x = \ln\left(\frac{1}{2}k\right) \Rightarrow \frac{1}{2}k = e^x$ eingesetzt in $y = \frac{1}{4}k^2$ ergibt $y = e^{2x}$. Das entspricht f_0.

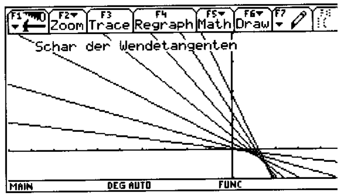
Wendetangenten:

$$f_k'\left(\ln\left(\frac{1}{2}k\right)\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{1}{2}k - k\right) = -\frac{1}{2}k^2,$$

die Steigung in den Wendepunkten beträgt also $m_W = -\frac{1}{2}k^2$.

Punkt-Steigungsform der Wendetangenten:

$$y - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{2}k^2\left(x - \ln\left(\frac{1}{2}k\right)\right)$$



(3) Für zwei Graphen mit k_1 und k_2, die sich auf der y-Achse rechtwinklig schneiden, muss gelten:

(A) $f_{k_1}(0) = f_{k_2}(0)$ (Sie schneiden die y-Achse in demselben Punkt) und

(B) $f_{k_1}'(0) \cdot f_{k_2}'(0) = -1$ (ihre Tangenten stehen dort senkrecht aufeinander).

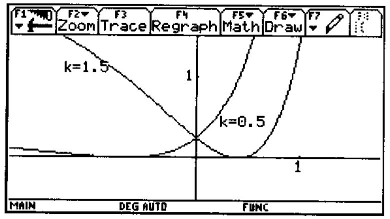
Aus (A) folgt $(k_1 - 1)^2 = (k_2 - 1)^2$ und da ausgeschlossen wird, dass $k_1 = k_2$ ist, folgt daraus $k_1 - 1 = -k_2 + 1$, also $k_1 = 2 - k_2$.

Allgemein ist $f_k'(0) = 2(1 - k)$

Nach (B) soll gelten $2(1 - k_1) \cdot 2(1 - 2 + k_1) = -1$

$(1 - k_1)^2 = \frac{1}{4}$ also $k_1 = \frac{1}{2}$ und $k_2 = \frac{3}{2}$.

Die beiden Graphen zu $f_{0,5}(x) = (0{,}5 - e^x)^2$ und $f_{1,5}(x) = (1{,}5 - e^x)^2$ schneiden sich auf der y-Achse im Punkt $P(0\,|\,0{,}25)$ rechtwinklig. Ihre Tangenten haben dort die Steigungen -1 und $+1$.

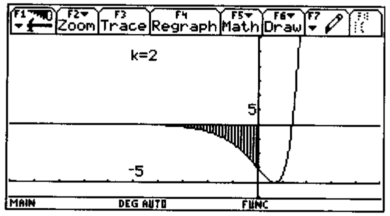


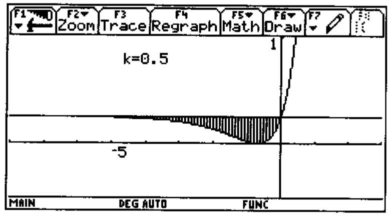
(4) Flächeninhalt und Volumen:
Für $k > 0$ berechnet sich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der Asymptote im zweiten Quadranten durch

$$A = \left| \int_{-\infty}^{0} k^2 - f_k(x)dx \right|$$

$$= \left| [k^2x - 0{,}5e^{2x} + 2ke^x - k^2x]_{-\infty}^{0} \right|$$

$$= |\, 2k - 0{,}5 \,|$$





Für die Berechnung des Volumens des Rotationskörpers kann man die Funktion so nach unten verschieben, dass ihre Asymptote mit der x-Achse zusammen fällt. Die verschobene Funktion hat dann die Gleichung

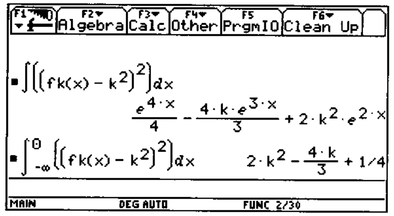
$$fv_k(x) = (k - e^x)^2 - k^2 = -2ke^x + e^{2x}.$$

Das Volumen des Rotationskörpers von fv um die x-Achse berechnet sich durch:

$$V = \pi \cdot \int_{-\infty}^{0} \left(e^{2x} - 2ke^x\right)^2 dx$$

$$= \left| \pi\left[0{,}25e^{4x} - \frac{4}{3}ke^{3x} + 2k^2e^{2x}\right]\right|_{-\infty}^{0}$$

$$= \pi\left(2k^2 - \frac{4}{3}k + 0{,}25\right)$$



Niedersachsen Mathematik – Stochastik: Übungsaufgabe 3
(50 Min., Hilfsmittel: GTR/CAS)

Sehbeteiligung

Während einer Fußballweltmeisterschaft werden Behauptungen über die Sehbeteiligung im Fernsehen aufgestellt. Eine Zeitung meldet: „Das Spiel Deutschland gegen Kamerun sahen 26,01 Millionen Zuschauer in der ARD“. Zum gleichen Spiel stand im Teletext, dass eine Stichprobe mit einem Umfang von 12 000 eine Sehbeteiligung von 75 % ergeben hatte.

a) Andere Stichproben mit einem Umfang von 12 000 werden wohl nicht genau 75 % ergeben.
Machen Sie auf dem 2σ-Niveau eine Aussage über die Anzahl der Zuschauer dieses Spiels, mit der man bei einer solchen Stichprobe rechnen muss.
Schätzen Sie auch die tatsächliche Sehbeteiligung in Prozent.
Untersuchen Sie, wie genau man bei 12 000 Befragten die Anzahl der Zuschauer auf dem 2σ-Niveau abschätzen kann, und nehmen Sie Stellung zu der im Aufgabenkopf genannten Schlagzeile.

b) Wenn man alle 12 000 ausgesuchten Personen ansprechen will, muss man damit rechnen, einzelne Personen nicht zu erreichen. Erfahrungsgemäß trifft man nur $\frac{2}{3}$ der Personen an.
Schätzen Sie die Anzahl der Personen ab, die mit großer Sicherheitswahrscheinlichkeit dreimal hintereinander nicht angetroffen werden.
Erläutern Sie den Begriff „große Sicherheitswahrscheinlichkeit“ und die Annahmen, die man bei der Ihrer Schätzung zugrunde liegenden Modellierung machen muss.

c) In einer Befragung wird festgestellt, dass von 40 000 Personen immerhin 30 000 das Spiel gesehen haben.
Ermitteln Sie die tatsächliche Sehbeteiligung p auf dem 2σ-Niveau.

Lösung

a) Bei einer Stichprobe von 12 000 kann man sowohl die Binomialverteilung als auch die Normalverteilung als Modell wählen, weil die Anzahl recht hoch ist. Mit etwa 95,5 % Wahrscheinlichkeit liegt der erwartete Wert in der 2σ-Umgebung vom Stichprobenergebnis.

$\mu = 12\,000 \cdot 0{,}75 = 9\,000$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{12\,000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} \approx 47{,}434$

$9\,000 - 2 \cdot 47{,}5 = 8\,905$

$9\,000 + 2 \cdot 47{,}5 = 9\,095$

Lösung mit dem Rechner:
Mit der „invNorm“-Funktion des Rechners erhält man den linken x-Wert des Bereiches, also $9\,000 - 2 \cdot \sigma$.

Eingegeben werden der Bereich

$0{,}0225 = 2{,}25\ \%$, $\mu = 9\,000$ und

$\sigma = \sqrt{12\,000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}$.

$2 \cdot \sigma \approx 9\,000 - 8\,905 = 95$

Man kann also mit etwa 95,5 % Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass man in der Stichprobe von 12 000 Fernsehzuschauern zwischen 8 905 ($\approx 74{,}2$ %) und 9 095 ($\approx 75{,}8$ %) ARD-Zuschauer findet. Auf dem 2σ-Niveau liegt also die tatsächliche Sehbeteiligung zwischen 74,2 % und 75,8 %.

Bei 12 000 Befragten, von denen 75 % ARD eingeschaltet hatten, gilt $2\sigma \approx 95$, das entspricht $\approx 0{,}79$ % von 12 000 bzw. $\approx 1{,}06$ % von 9 000.

Man kann die Anzahl der Zuschauer auf dem 2σ-Niveau also nur auf etwa 1,06 % genau angeben.

Wenn man von etwa 26 Millionen Zuschauern ausgeht, müsste man dazu sagen: „$\pm 276\,000$“. Die Zahl 26,01 täuscht aber eine Genauigkeit von 10 000 vor.

b) Man muss die Annahme machen, dass die Personen unabhängig voneinander aufgesucht werden. Wahrscheinlich ist das bei den Befragungen nicht gegeben, weil die Befrager eine gewisse Reihenfolge und bestimmte Zeitspannen einhalten.

Es ist nicht eindeutig, was man unter einer „großen Sicherheitswahrscheinlichkeit“ versteht.
Im vorliegenden Fall kann man von den Wahrscheinlichkeiten einer 2σ-Umgebung oder von 95 % ausgehen, weil ein Fehler nicht allzu schwer wiegt. Etwa 95,5 % aller Ereignisse liegen bei normalverteilten Größen in der 2σ-Umgebung von μ, was für das Problem des Antreffens als „große Sicherheitswahrscheinlichkeit“ ausreicht.
Bei medizinischen Problemen müsste man den Bereich einer „großen Sicherheitswahrscheinlichkeit“ bestimmt enger wählen, er läge vielleicht bei 99,9 % oder sogar noch höher.

Unter der Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Befragungen ist die Wahrscheinlichkeit, jemanden 3-mal nicht anzutreffen

$$p = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Bei 12 000 Befragten wären dies also etwa 444 Personen.

Für die Intervallschätzung bietet sich wieder die Normalverteilung mit

$\mu = 444\frac{4}{9}$

und

$\sigma = \sqrt{12\,000 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{26}{27}}$ an.

Man findet das gesuchte Intervall wie in Teilaufgabe a beschrieben.

Mit etwa 95,5 % Wahrscheinlichkeit trifft man zwischen 403 und 485 Personen dreimal nicht an.

c) X: Anzahl der Fernsehzuschauer des Fußballspiels
X ist binomialverteilt mit $n = 40\,000$ und unbekanntem p

$\mu = 40\,000 \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{40\,000 \cdot p \cdot (1-p)}$

Da die tatsächliche Sehbeteiligung auf dem 2σ-Niveau angegeben werden soll, muss der bekannte Zusammenhang $P(|k - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95{,}5\,\%$ verwendet werden.
Somit kommen alle p infrage, für die gilt:

$P(|30\,000 - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95{,}5\,\%$

$\Leftrightarrow \quad |30\,000 - n \cdot p| \leq 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$\Leftrightarrow \quad |30\,000 - 40\,000 \cdot p| \leq 2\sqrt{40\,000 \cdot p \cdot (1-p)}$

$\Leftrightarrow \quad (30\,000 - 40\,000 \cdot p)^2 \leq 4 \cdot 40\,000 \cdot p \cdot (1-p)$

$\underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{15\,001 - \sqrt{7\,501}}{20\,002} \leq p \leq \frac{15\,001 + \sqrt{7\,501}}{20\,002}$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}74564\ldots \leq p \leq 0{,}75430\ldots$

Mit dem GTR kann die entsprechende quadratische Gleichung näherungsweise gelöst werden und man findet so das Lösungsintervall der quadratischen Ungleichung.

Das 95,5 %-Konfidenzintervall lautet: [74,56 %; 75,43 %].

Auf dem 2σ-Niveau kann man davon ausgehen, dass die tatsächliche Sehbeteiligung zwischen 74,56 % und 75,43 % liegt.