Aufgabe 1A

In einem Krankenhaus muss das Operationsbesteck sterilisiert werden. Es wird nach klassischer Definition als steril bezeichnet, wenn sich keine lebenden Erreger mehr darauf befinden.
Die Sterilisation mit heißem Wasserdampf kann näherungsweise durch die Funktion N mit $N(x) = N_0 \cdot e^{-c \cdot x}$ modelliert werden. Hierbei bezeichnet $N(x)$ die Anzahl der noch lebenden Erreger, N_0 die Anzahl der zu Beginn lebenden Erreger, x die Zeit in Minuten (min) nach Beginn des Sterilisationsprozesses und c eine positive Konstante in $\frac{1}{\text{min}}$.

a) Auf einem Operationsbesteck befinden sich $1\,000\,000$ lebende Erreger, die durch eine Dampfsterilisation mit $c = 0{,}25$ abgetötet werden sollen.
Bestimmen Sie die Anzahl der 30 Minuten nach dem Beginn der Dampfsterilisation noch lebenden Erreger.

Berechnen Sie auf Minuten genau den frühesten Zeitpunkt, zu dem sich auf dem Operationsbesteck weniger als 100 lebende Erreger befinden.

Beurteilen Sie die Eignung des Modells im Hinblick auf die klassische Definition von „steril". (9 BE)

b) Beschreiben Sie die Bedeutung der Gleichung $N'(x) = -c \cdot N(x)$ im Sachzusammenhang.

Untersuchen Sie, wie sich eine Verdoppelung von N_0 auf die Änderungsrate von N auswirkt.

Als Maß für die Widerstandsfähigkeit der Erreger wird der sogenannte D-Wert verwendet. Er gibt die Zeit an, wie lange ein Sterilisationsprozess auf die Erreger einwirken muss, um eine Reduzierung auf ein Zehntel ihrer aktuellen Anzahl zu erreichen.

Zeigen Sie, dass für den D-Wert gilt: $D = \frac{\ln(10)}{c}$. (11 BE)

Im Folgenden soll die Vermehrung von Erregern betrachtet werden. Die Anzahl der Erreger kann für verschiedene Erregertypen näherungsweise durch die Funktionen f_k mit

$f_k(x) = \frac{10}{1 + 9 \cdot e^{-10 \cdot k \cdot x}}$, $x \in \mathrm{IR}$, $x \geq 0$, $k > 0$, modelliert werden. Dabei bezeichnet x die Zeit in Stunden (h) nach Beobachtungsbeginn und $f_k(x)$ die Anzahl der Erreger in Millionen.

c) Vergleichen Sie die Bedeutung von $f_k(3)$ und $\int_0^3 f_k'(x)\,dx$ im Sachzusammenhang.

Betrachtet werden zwei Erregertypen:
- Typ 1 mit $k_1 = 0{,}017$,
- Typ 2 mit $k_2 = 0{,}027$.

Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Wachstumsgeschwindigkeit des einen Erregertyps doppelt so groß wie die des anderen Typs ist. (11 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A

Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = \dfrac{10}{1+9\cdot e^{-10\cdot k\cdot x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$, betrachtet.

d) Für jedes $k > 0$ bezeichnet t_k die Tangente an den Graphen von f_k im Wendepunkt $W_k\left(\dfrac{\ln(3)}{5\cdot k}\middle| 5\right)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Tangenten t_k.

Die Tangente t_k hat die Nullstelle $x = \dfrac{\ln(3)-1}{5\cdot k}$. Zu jeder Tangente t_k existiert eine zu t_k senkrechte Gerade y_k mit $y_k(x) = -\dfrac{1}{25\cdot k}\cdot x + 5 + \dfrac{\ln(3)}{125\cdot k^2}$, die ebenfalls durch W_k verläuft. Für jedes $k > 0$ schließen die Tangente t_k, die Gerade y_k und die x-Achse ein Dreieck ein.

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal werden kann. (15 BE)